Τα σημεία της επιφ. του βουνού, Γ_f, τα οποία έχουν $z = c \in (-\infty, 4]$ (ύψος του σημείου $(x,y,z) \in \Gamma_f$) είναι τα σημεία $(x, y, f(x,y))$, όπου $(x,y) \in L_f(c)$

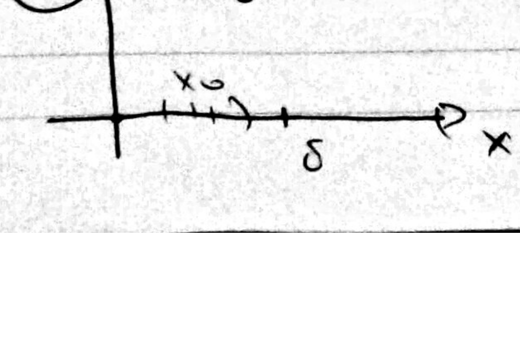
<u>Αλλιώς</u> το σύνολο $L_f(c) \times \{c\}$ είναι κύκλοι κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{4-c}$ οι οποίοι βρίσκονται στο επίπεδο $z = c$

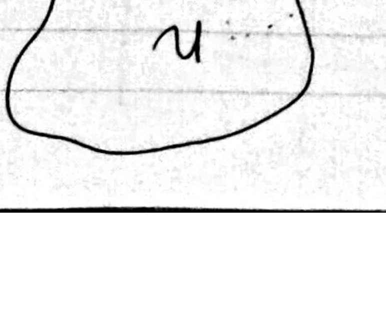
<u>12/11/18</u>

<u>Όρια και συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων</u>

<u>Ορισμός</u> Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σημ. συσσ. του U και $f: U \to \mathbb{R}$. Λέμε «η f συγκλίνει (ή τείνει) στο $\ell \in \mathbb{R}$, όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$» ή «η f έχει στο $\bar{x}_0$ το όριο $\ell \in \mathbb{R}$».
Συμβολικά «$f(\bar{x}) \to \ell$, όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$».
αν: $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$

<u>Πρόταση</u>: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$: $|f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$





<u>Απόδειξη</u>: ($\Rightarrow$): Αντί για $A \Rightarrow B$, θα δείξουμε: $\neg B \Rightarrow \neg A$:

Έστω ότι $\exists\, \varepsilon>0, \forall \delta>0, \exists\, \bar{x} \in (B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}) \cap U : |f(\bar{x}) - \ell| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} : \exists\, \bar{x}_\nu \in U \cap B\left(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu}\right) \setminus \{\bar{x}_0\}$ δηλ.

$\exists\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ (*) και $|f(\bar{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \not\to \ell$

(*) αφού $\bar{x}_\nu \in B\left(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu}\right) \Leftrightarrow 0 \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{1}{\nu} \to 0$

($\Rightarrow \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$)

($\Leftarrow$): Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. θνδο $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$ δηλ. θνδο: $\forall \varepsilon>0\ \exists \nu_0 : \forall \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$ (τυχαίο αλλά σταθερό). Τότε $\exists\, \delta>0$ έτσι ώστε $\forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$

<u>Όμως, από το $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, γνωρίζουμε ότι για αυτό το $\delta>0$</u> $\boxed{\exists \nu_0\ \forall \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \delta \Leftrightarrow \bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \delta) \Rightarrow \Rightarrow \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon}$

SOS

<u>Πρόταση</u> (ΑΣΚΗΣΗ):

Το όριο μιας συγκλίνουσας συνάρτησης f, όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$, είναι μοναδικό. Το συμβολίζουμε: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})\ (\in \mathbb{R})$

<u>Παρατήρηση</u>: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \underbrace{|f(\bar{x}) - \ell|}_{= \left|\,|f(\bar{x}) - \ell| - 0\right|} = 0$

Παρατήρηση: Αν το $\bar{x}_0$ είναι εσωτερικό σημείο του U, τότε: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\bar{u}\to\bar{0}} f(\bar{x}_0+\bar{u}) = l$

Ορισμός: Η συνάρτηση $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται

(α) συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$, αν $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

(β) συνεχής σε ένα $A \subset U$, αν είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in A$

(γ) συνεχής (στο U), αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\bar{x}_0 \in U$.

Παρατήρηση: Αν $A \subset U$ δεν είναι ανοιχτό, μπορεί ο περιορισμός της f στο A: [$\Leftrightarrow$ $f|_A : A \to \mathbb{R}$, $f|_A(\bar{x}) := f(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in A$] να είναι συνεχής, ενώ η f να μην είναι συνεχής στο A.

$\Downarrow$

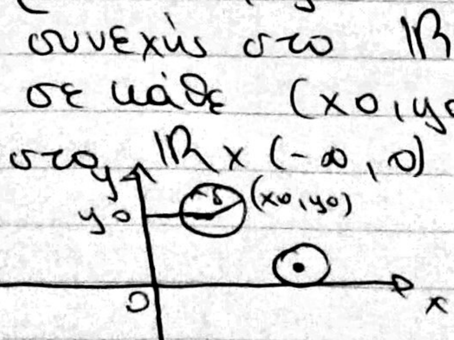
[$\forall \bar{x} \in A$: $f|_A$ συνεχής στο $\bar{x}$]

[Δεν ισχύει απαραίτητα: $\forall \bar{x} \in A$: f συνεχής στο $\bar{x}$]

Άσκ: Παράδειγμα (1) Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ διότι. Είναι συνεχής σε κάθε $(x_0,y_0) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ όπως επίσης και στο $\mathbb{R} \times (-\infty,0)$ ως σταθερή:



$\longrightarrow$

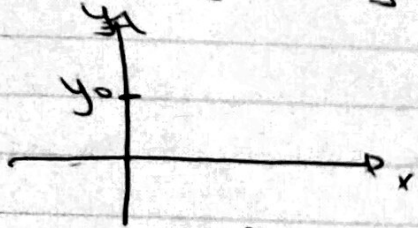
Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ με $y_0>0$ και έστω $\underbrace{(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)}$

$\Leftrightarrow [\forall \delta>0\ \exists \nu_0\ \forall \nu\geq\nu_0 : |(x_\nu-x_0,\ y_\nu-y_0)|<\delta]$

$\Leftrightarrow x_\nu\to x_0 \wedge y_\nu\to y_0$ (στο $\mathbb{R}$)

$\exists\nu_0\ \forall\nu\geq\nu_0 : y_\nu>0$ (*)

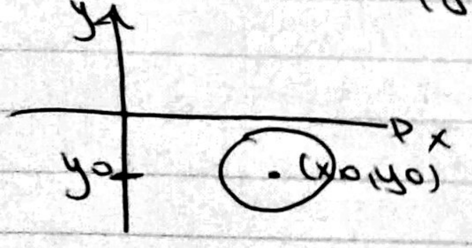
(*): $y_\nu\to y_0$ στο $\mathbb{R}$ και $y_0>0 \Rightarrow \exists\nu_0\ \forall\nu\geq\nu_0 :$ $|y_\nu-y_0|<y_0 \Leftrightarrow -y_0<y_\nu-y_0<y_0 \Leftrightarrow \boxed{0<y_\nu<2y_0}$



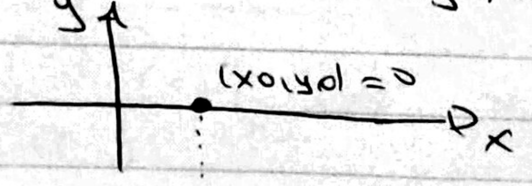
Άρα από το $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$ με $y_0>0$ προκύπτει ότι: $\exists\nu_0 : \forall\nu\geq\nu_0 : (x_\nu,y_\nu)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$

όπου $f(x_\nu,y_\nu)=1 \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1=f(x_0,y_0)$
$\forall\nu\geq\nu_0$

Αντίστοιχα για σημεία (x_0,y_0) με $y_0<0$



<u>Όμως</u> για (x_0,y_0) με $y_0=0$ έχουμε $f(x_0,y_0)=1$



και η f δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό, αφού, <u>π.χ.</u> για $(x_\nu,y_\nu)=\left(x_0,-\frac{1}{\nu}\right)$ έχουμε

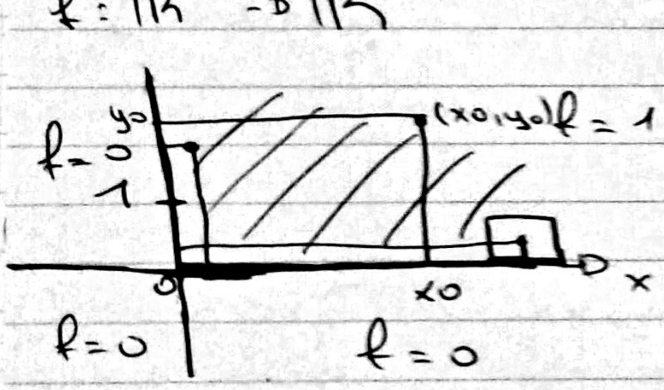
$(x_\nu,y_\nu)=\left(x_0,-\frac{1}{\nu}\right)\to(x_0,0)$ [αφού $x_\nu=x_0\to x_0$ και $-\frac{1}{\nu}\to 0$]

<u>αλλά</u> $f(x_\nu,y_\nu)=f\left(x_0,-\frac{1}{\nu}\right)=0 \not\to f(x_0,y_0)=1$

Παράδειγμα 2:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{παντού αλλού} \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



Η f είναι <u>ασυνεχής</u> στα σημεία $(0, y_0)$ με $y_0 \geq 0$ και στα σημεία $(x_0, 0)$ με $x_0 \geq 0$.
Παντού αλλού είναι <u>συνεχής</u>.

[π.χ. για $(x_0,y_0) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ και
$(x_\nu, y_\nu) \to (x_0,y_0) \Leftrightarrow x_\nu \to x_0 \wedge y_\nu \to y_0 \Rightarrow$
$\exists\, \nu_0\ \forall\, \nu \geq \nu_0 : x_\nu, y_\nu > 0$]